Le Problème de Steklov en Géometrie Spectrale

Julia Levesque, Université de Montréal
Sous la supervision de Jean Lagacé
et Iosif Polterovich

Résumé

Dans ce rapport, les lectures dirigées effectuées dans le cadre d'un stage en géométrie spectrale seront détaillées. Après une brève introduction à la théorie spectrale, les résultats de trois mois de recherches seront présentés. Quelques propositions seront montrées puis l'opérateur de Laplace-Beltrami sera introduit, suivi par la résolution du problème de Steklov sur différents domaines de l'espace euclidien. Cette dernière partie permettra de mettre en évidence l'importance du lien entre la géométrie d'une variété et son spectre de valeurs propres. Il faudra donc expliciter certains résultats préalables, pour ensuite définir et présenter le laplacien, tel que c'est fait dans [3]. Enfin, une brève présentation de la vie de Vladimir Andreevich Steklov permettra d'introduire le problème de Steklov, et sa résolution sur des domaines en une et deux dimensions.

I Introduction à la théorie spectrale

L'objectif de la géométrie spectrale est d'étudier les vibrations causées par n'importe quel type d'onde, lumineuse ou mécanique, sur une variété riemannienne quelconque. Plus précisément, les liens entre la géométrie de cette variété et son spectre de valeurs propres sont mis en évidence à partir de la résolution de différents problèmes d'équations différentielles. En effet, les valeurs propres obtenues représentent les fréquences de vibrations du domaine, et les fonctions propres en représentent les modes.

Certaines propriétés d'algèbre matricielle sont donc utilisées dans l'espace des fonctions différentiables. Pour que cela soit possible, il faut que l'opérateur impliqué soit elliptique. Le laplacien satisfait cette condition. Pour cette raison, il occupe une place centrale en théorie spectrale. Dans ce rapport, seuls les domaines de l'espace euclidien seront étudiés.

II Le laplacien

Avant même de commencer les lectures, quelques propositions ont été montrés afin de mettre en place certaines notions utiles pour comprendre les articles futurs.

II.1 Valeurs propres d'une matrice hermitienne

Tout d'abord, on rappelle que les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice quelconque M sont, respectivement, les λ et $\boldsymbol{x}$ satisfaisant :

$$M\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

De façon analogue, les valeurs propres et fonctions propres du laplacien, noté Δ, sur une variété riemannienne Ω sont obtenues en résolvant l'équation suivante :

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda u & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où la deuxième équation est la condition frontière de Dirichlet. On aussi aurait pu choisir la condition frontière de Neumann : $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$

Proposition II.1 *Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres d'une matrice A hermitienne, ordonnées par ordre de valeur absolue, i.e. $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq ... \leq |\lambda_n|$. Pour deux vecteurs $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, on note par (x, y) le produit scalaire usuel. Alors :*

$$|\lambda_1| = \inf_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}, \tag{1}$$

$$|\lambda_n| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}, \tag{2}$$

plus généralement :

$$|\lambda_j| = \inf_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0 \\ x\perp v_i \forall i<j}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \tag{3}$$

PREUVE 1. A étant hermitienne, ses vecteurs propres $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Donc, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{v}_i \\ \Rightarrow A\boldsymbol{x} &= \sum_{i=1}^{n} c_i A\boldsymbol{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i \boldsymbol{v}_i \\ \Rightarrow \frac{(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} &= \frac{(\sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i \boldsymbol{v}_i)(\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{v}_i)}{(\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{v}_i)(\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{v}_i)} \end{aligned}$$

Or, puisque A est hermitienne, $\forall i \neq j$ on a $(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = 0$ et $||\boldsymbol{v}_i|| = 1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \lambda_i ||\boldsymbol{v}_i||^2}{\sum_{i=1}^{n} c_i^2 ||\boldsymbol{v}_i||^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^{n} c_i^2} \qquad (4)
\end{aligned}$$

Alors, on voit que lorsque l'on veut minimiser (4) avec $\boldsymbol{x} \neq 0$, les λ_i étant fixés, on minimise le numérateur par $c_i = 0 \ \forall i \in \{2, ..., n\}$. Alors, pour tout c_1, on obtient (1).

De même, pour maximiser (4) on prend $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_n$. On obtient alors (2).

Enfin, (3) est obtenue en prenant un vecteur $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{v}_i \forall i < j$. Dans ce cas :

$$\frac{(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = \frac{\sum_{i=j}^{n} c_i^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}$$

Par le même raisonnement que pour montrer (1), on peut alors déduire (3). □

II.2 Propriétés du laplacien

On définit le laplacien sur $\mathbb{R}^n$ par : $\Delta = div.\nabla = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$.

Soit $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions lisses à support compact sur $\mathbb{R}^n$. On y définit le produit scalaire par :

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{x})\overline{g(\boldsymbol{x})} d\boldsymbol{x}$$

Proposition II.2 $\forall f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \ (\Delta f, g) = (f, \Delta g)$

Preuve 2. Montrons par induction que $\forall f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ le laplacien est auto-adjoint, c'est-à-dire qu'on a : $(\Delta f, g) = (f, \Delta g)$.

Pour n = 1, on se place sur $\mathbb{R}$. On a que :

$$\begin{aligned}
(\Delta f, g) &= \int_{\mathbb{R}} \Delta f(x)\overline{g(x)} \ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \overline{g(x)} \ dx
\end{aligned}$$

Par intégration par partie, on a :

$$(\Delta f, g) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x}\overline{g(x)}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f(x)}{\partial x} \overline{\frac{\partial g(x)}{\partial x}} \ dx$$

Or, comme f et g sont à support compact, $\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x}\overline{g(x)}\right]_{-\infty}^{\infty} = 0$, donc :

$$\begin{aligned}
(\Delta f, g) &= -\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f(x)}{\partial x}\overline{\frac{\partial g(x)}{\partial x}}\ dx \\
&= -\left[f\overline{\frac{\partial g(x)}{\partial x}}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}} f\overline{\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2}}\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f\overline{\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2}}\ dx \\
&= (f, \Delta g)
\end{aligned}$$

Supposons qu'il existe un p tel que $(\Delta f, g) = (f, \Delta g)$ sur $\mathbb{R}^{p-1}$. Alors, sur $\mathbb{R}^p$:

$$\begin{aligned}
(\Delta f, g) &= \int_{\mathbb{R}} ... \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial^2 f(x_1, ..., x_p)}{\partial x_k^2}\overline{g(x_1, ..., x_p)}\ dx_p...dx_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}} ... \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\partial^2 f(x_1, ..., x_p)}{\partial x_k^2}\overline{g(x_1, ..., x_p)}\ dx_p...dx_1 \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} ... \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 f(x_1, ..., x_p)}{\partial x_p^2}\overline{g(x_1, ..., x_p)}\ dx_p...dx_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}} ... \int_{\mathbb{R}} f(x_1, ..., x_p)\overline{\sum_{k=1}^{p-1} \frac{\partial^2 g(x_1, ..., x_p)}{\partial x_k^2}}\ dx_p...dx_1 \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} ... \int_{\mathbb{R}} f(x_1, ..., x_p)\overline{\frac{\partial^2 g(x_1, ..., x_p)}{\partial x_p^2}}\ dx_p...dx_1
\end{aligned}$$

grâce à l'hypothèse de récurrence et à la preuve sur $\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow (\Delta f, g) = (f, \Delta g) \text{ sur } \mathbb{R}^n.$$

□

Une dernière propriété du laplacien est très importante :

Proposition II.3 *Soient $\phi_1, \ldots, \phi_n$ les fonctions propres du laplacien. Alors :*

$$\forall i \neq j, (\phi_i, \phi_j) = 0$$

PREUVE 3. Soient ϕ_i et ϕ_j deux fonctions propres du laplacien distinctes, c'est à dire que : $\Delta\phi_i = \lambda_i\phi_i$ et $\Delta\phi_j = \lambda_j\phi_j$. Alors :

$$(\phi_i, \phi_j) = \left(\frac{\Delta\phi_i}{\lambda_i}, \phi_j\right) = \left(\phi_i, \frac{\Delta\phi_j}{\lambda_j}\right)$$

Puisque le laplacien est auto-adjoint, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\phi_i}{\lambda_i}, \Delta\phi_j\right) &= \left(\Delta\phi_i, \frac{\phi_j}{\lambda_j}\right) \\
\Rightarrow 0 &= \left(\frac{\phi_i}{\lambda_i}, \Delta\phi_j\right) - \left(\Delta\phi_i, \frac{\phi_j}{\lambda_j}\right) \\
\Rightarrow 0 &= \int_\Omega \frac{\phi_i}{\lambda_i}\overline{\Delta\phi_j} - \Delta\phi_i\overline{\frac{\phi_j}{\lambda_j}}\ d\boldsymbol{x} \\
\Rightarrow 0 &= \int_\Omega \frac{\phi_i}{\lambda_i}\overline{\lambda_j\phi_j} - \lambda_i\phi_i\overline{\frac{\phi_j}{\lambda_j}}\ d\boldsymbol{x}
\end{aligned}$$

Puisque les λ sont réels, on a :

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 0 &= \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i} - \frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)\int_\Omega \phi_i\overline{\phi_j}\ d\boldsymbol{x} \\
\Rightarrow 0 &= \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i} - \frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)(\phi_i, \phi_j)
\end{aligned}$$

Or, puisque $\lambda_i \neq \lambda_j$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda_j}{\lambda_i} - \frac{\lambda_i}{\lambda_j} = \frac{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i + \lambda_j)}{\lambda_i\lambda_j} \neq 0 \\
&\Rightarrow (\phi_i, \phi_j) = 0
\end{aligned}$$

$\square$

De cette façon, le laplacien étant auto-adjoint et ses fonctions propres formant une base orthogonale de l'ensemble de solutions, on peut le comparer aux matrices hermitiennes et donc lui appliquer le résultat obtenu en (3). En effet, si on choisit les conditions frontières de Dirichlet on obtient :

$$\lambda_j = \inf_{\substack{f\in C_0^\infty(\Omega)\\ f\neq 0\\ f\perp\phi_i\forall i<j}} \frac{(\Delta x, x)}{(x, x)} = \inf_{\substack{f\in C_0^\infty(\Omega)\\ f\neq 0\\ f\perp\phi_i\forall i<j}} \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\Delta f(x)\overline{f(x)}dx}{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx},$$

où λ_j est la j^e valeur propre du laplacien en terme de valeur absolue, et f une fonction quelconque.

III Le problème de Steklov

Parmi les différents problèmes étudiés en géométrie spectrale, le problème de Steklov fait partie d'un des nombreux héritages mathématiques laissé par le mathématicien Vladimir Andreevich Steklov.

Né en 1866 à Nijni Novgorod, en Russie, Steklov était aussi spécialisé en physique et en mécanique. En effet, passionné par le sciences, il disait que *"les mathématiques et la physique ont maintenant fusionné à un tel point qu'il est parfois difficile de retrouver la limite qui les sépare"*. En 1919, il fonda le Département de Mathématiques dans l'Université de Moscou et le fit fusionner deux ans plus tard avec le Département de Physique. De cette façon, il fonda et dirigea l'Institut de Mathématiques et de Physique, qui porte le nom d'Institut Steklov depuis sa mort en 1926. Aujourd'hui, l'Institut Steklov est l'un des plus grand instituts en mathématiques au monde.

Outre un héritage mathématique, Steklov a, entre autres, laissé au domaine de la géométrie spectrale le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{sur } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \sigma u & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Ce problème se retrouve dans de nombreuses situations de la vie quotidienne, comme on peut en trouver un exemple dans [2] sur l'importance du choix de la tasse lorsqu'on transporte son café. Il a été résolu analytiquement sur le disque et le carré. Ces domaines ayant pour particularité d'être très symétriques, on peut utiliser la séparation de variables pour résoudre l'équation différentielle $\Delta u = 0$

On commence par étudier le disque. Il est important de mentionner que les translations, les rotations et les symétries du domaine ne changent pas les résultats. De plus, si le domaine est transformé par une homothétie, les valeurs propres sont compensées par la constante d'agrandissement ou de réduction. En effet, si les valeurs propres λ correspondent aux valeurs propres de Steklov sur Ω, le domaine $\alpha\Omega$ aura pour valeurs propres $\frac{\lambda}{\alpha}$.

On se place donc sur le cercle unité. Par commodité, on utilise les coordonnées polaires. De cette façon : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $tan\theta = \frac{y}{x}$. En coordonnées polaires, on peut montrer par dérivation en chaîne que le laplacien devient :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

Sans perte de généralité, la symétrie du domaine permet de rechercher des solutions de la forme $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ Alors, on résout :

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2}\Theta(\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial R(r)}{\partial r}\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Theta(\theta)}{\partial\theta^2}R(r) \\
\Rightarrow 0 &= r^2 R''(r) + rR'r) + \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}R(r) \\
\Rightarrow 0 &= r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} \\
\Rightarrow -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} &= r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)}
\end{aligned}$$

C'est là toute l'astuce de la séparation de variables. Puisque θ et r sont deux variables indépendantes, on ne peut qu'avoir un $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} -k^2 = \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} \\ k^2 = r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} \end{cases} \tag{5}$$

La première équation de (5) est une équation différentielle ordinaire d'ordre 2. Sa résolution est plutôt directe et donne $\Theta(\theta) = c_1\cos(k\theta) + c_2\sin(k\theta)$

La deuxième équation de (5) nécessite un peu plus de travail. Tout d'abord, on a que :

$$r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} = k^2 \Leftrightarrow r^2R''(r) + rR'(r) - k^2R(r) = 0$$

Supposons que :

$$\begin{aligned}
R(r) &= \sum_{i=0}^{l} a_i r^i \text{ avec } a_l \neq 0 \\
\Rightarrow R'(r) &= \sum_{i=1}^{l} a_i i r^{i-1} \\
\Rightarrow R''(r) &= \sum_{i=2}^{l} a_i i(i-1) r^{i-2}
\end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation, on obtient :

$$
\begin{aligned}
&0 = r^2 \sum_{i=2}^{l} a_i i(i-1) r^{i-2} + r \sum_{i=1}^{l} a_i i r^{i-1} - k^2 \sum_{i=0}^{l} a_i r^i \ \forall r \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow &0 = \sum_{i=2}^{l} a_i i(i-1) r^{i} + \sum_{i=1}^{l} a_i i r^{i} - k^2 \sum_{i=0}^{l} a_i r^i \ \forall r \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow &0 = \sum_{i=2}^{l} a_i i(i-1) r^{i} + \sum_{i=2}^{l} a_i i r^{i} - k^2 \sum_{i=2}^{l} a_i r^i + a_1 r - k^2(a_0 + a_1 r) \ \forall r \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow &0 = \sum_{i=2}^{l} a_i \left(i(i-1) + i - k^2 \right) r^i + a_1 r - k^2(a_0 + a_1 r) \ \forall r \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow &0 = \sum_{i=2}^{l-1} a_i \left(i(i-1) + i - k^2 \right) r^i + a_l \left(l(l-1) + l - k^2 \right) r^i + a_1 r - k^2(a_0 + a_1 r) \ \forall r \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow &0 = \sum_{i=2}^{l-1} a_i \left(i(i-1) + i - k^2 \right) r^i + a_1 r - k^2(a_0 + a_1 r) \ \textbf{et} \ a_l \left(l(l-1) + l - k^2 \right) r^l = 0 \ \forall r \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow &\sum_{i=2}^{l-1} a_i \left(i(i-1) + i - k^2 \right) r^i = 0 \ \textbf{et} \ a_1 r(1-k^2) + a_0 = 0 \ \textbf{et} \ \left(l(l-1) + l - k^2 \right) = 0 \ \forall r \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow &l = +-k \text{ et } a_0 = a_1 = ... = a_{l-1} = 0
\end{aligned}
$$

On élimine l = -k car on ne veut pas de singularité en 0. Alors :$R(r) = ar^k$ et $k \in \mathbb{N}$

Il reste maintenant à résoudre $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \sigma u$. Sur le cercle, $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial u}{\partial r} = R'(r)\Theta(\theta)$. De plus, sur $\partial\Omega$ $r = 1$ Donc :

$$
\begin{aligned}
R'(1)\Theta(\theta) &= \sigma R(1)\Theta(\theta) \\
\Rightarrow R'(1) &= \sigma R(1) \\
\Rightarrow \sigma &= \frac{ka}{a} = k
\end{aligned}
$$

Enfin, on obtient une base de fonctions propres $B = \{r^k \cos(k\theta), r^k \sin(k\theta)\}$ de valeurs propres $0, 1, 1, 2, 2...$

Prenons le maintenant le carré $[-1;1] \times [-1,1]$. La méthode ici est similaire, c'est à dire qu'on procède par séparation de variables : on prend $u(x,y) = v(x)w(y)$. On obtient alors :

$$\begin{cases} \frac{v''(x)}{v(x)} = -\alpha^2 \\ \frac{w''(y)}{w(y)} = \alpha^2 \end{cases} \tag{6}$$

Ici encore, les équations différentielles sont ordinaires. On obtient avec la méthode usuelle de notre choix :

$$\begin{aligned} v(x) = & c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x) \\ w(y) = & d_1 \cosh(\alpha y) + d_2 \sinh(\alpha y) \end{aligned}$$

On a donc une base de fonctions propres : $B = \{\cosh \alpha y \cos \alpha x, \cosh \alpha x \cos \alpha y, \cosh \alpha y \sin \alpha x,$ $\cosh \alpha x \sin \alpha y, \sinh \alpha x \cos \alpha y, \sinh \alpha y \cos \alpha x, \sinh \alpha x \sin \alpha y\}$.

La difficulté, sur ce domaine, est de prendre en compte les quatre singularités aux quatre coins du carré. En effet, le vecteur normal dépend d'où on se place sur la frontière :

$$\begin{cases} \boldsymbol{n} = (1,0) & \text{si } x = 1 \text{ et } y \in]-1,1[\\ \boldsymbol{n} = (0,1) & \text{si } x \in]-1,1[\text{ et } y = 1 \\ \boldsymbol{n} = (-1,0) & \text{si } x = -1 \text{ et } y \in]-1,1[\\ \boldsymbol{n} = (0,-1) & \text{si } x \in]-1,1[\text{ et } y = -1 \end{cases} \tag{7}$$

En remplaçant dans $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \sigma u$ sur $\partial \Omega$ on obtient les quatre conditions suivantes :

$$\begin{cases} v'(x) = \sigma v(x) & \text{si } x = 1 \text{ et } y \in]-1,1[\\ w'(y) = \sigma w(y) & \text{si } x \in]-1,1[\text{ et } y = 1 \\ -v'(x) = \sigma v(x) & \text{si } x = -1 \text{ et } y \in]-1,1[\\ -w'(y) = \sigma w(y) & \text{si } x \in]-1,1[\text{ et } y = -1 \end{cases}$$

On choisit $u(x) = \beta \cosh \alpha y \cos \alpha x$. Alors la première équation donne :

$$v'(1) = \sigma v(1) \Rightarrow -\beta \alpha \sin \alpha = \beta \sigma \cos \alpha \Rightarrow \sigma = -\alpha \tan \alpha$$

On procède de même avec les deuxième, troisième et dernière équations qui donnent respectivement $\sigma = \alpha \tanh \alpha, \sigma = -\alpha \tan \alpha$ et $\sigma = -\alpha \tanh \alpha$.

On a alors une conditions sur α : si α satisfait $\tan(\alpha) = -\tanh(\alpha)$, alors les valeurs propres de Steklov sont de la forme : $\sigma = \alpha \tanh(\alpha)$ et les fonctions propres associées sont combinaisons linéaires de la base $B = \{\cos(\alpha x)\cosh(\alpha y),\ \cos(\alpha y)\cosh(\alpha x)\}$. Les résultats obtenus en choisissant les trois autres différents u(x) possibles sont présentés dans le tableau ci-dessous, extrait de [1] :

Eigenspace basis	Conditions on α	Eigenvalues	Asymptotic behaviour
$\cos(\alpha x)\cosh(\alpha y)$ $\cos(\alpha y)\cosh(\alpha x)$	$\tan(\alpha) = -\tanh(\alpha)$	$\alpha\tanh(\alpha)$	$\frac{3\pi}{4} + \pi j + \mathcal{O}(j^{-\infty})$
$\sin(\alpha x)\cosh(\alpha y)$ $\sin(\alpha y)\cosh(\alpha x)$	$\tan(\alpha) = \coth(\alpha)$	$\alpha\tanh(\alpha)$	$\frac{\pi}{4} + \pi j + \mathcal{O}(j^{-\infty})$
$\cos(\alpha x)\sinh(\alpha y)$ $\cos(\alpha y)\sinh(\alpha x)$	$\tan(\alpha) = -\coth(\alpha)$	$\alpha\coth(\alpha)$	$\frac{3\pi}{4} + \pi j + \mathcal{O}(j^{-\infty})$
$\sin(\alpha x)\sinh(\alpha y)$ $\sin(\alpha y)\sinh(\alpha x)$	$\tan(\alpha) = \tanh(\alpha)$	$\alpha\coth(\alpha)$	$\frac{\pi}{4} + \pi j + \mathcal{O}(j^{-\infty})$
xy		1	

TABLE 1. Eigenfunctions obtained by separation of variables on the square $(-1, 1) \times (-1, 1)$.

Pour trouver les α correspondants, on doit chercher les zéros de la fonction suivante : $f(x) = \tan(\alpha) + \tanh(\alpha)$. L'équation f(x) = 0 étant transcendante, les solutions en α se trouvent numériquement. Avec la méthode de Newton, on obtient alors les α, puis les valeurs propres σ.

Il reste alors à exprimer leur formule générale. On peut montrer que $\tanh j = 1 + O(j^{-\infty})$. Alors $\tan\alpha = -\tanh\alpha = -1 + O(\alpha^{-\infty}) \Rightarrow \alpha \simeq \frac{3\pi}{4} + \pi j$; $j \in \mathbb{N}$. On parle alors d'un comportement asymptotique à $\frac{3\pi}{4} + \pi j + O(j^{-\infty})$.

Bibliographie

[1] Alexandre Girouard, Iosif Polterovich. Spectral Geometry of the Steklov Problem, to appear in *J. Spectral Theory*, 2015.

[2] N. Kuznetsov,T. Kulczycki, M. Kwasnicki, A. Nazarov, S. Poborchi,
I. Polterovich, B. Siudeja. The legacy of Vladimir Andreevich Steklov, *AMS* 61 (2014), no. 1, 9-22.

[3] Yaiza Canzani. *Analysis on Manifolds via the Laplacian* [notes de cours], consultées au http ://www.math.harvard.edu/ canzani/math253/Laplacian.pdf en juin 2016, 2013.