

Les ouragans : Engins de destruction

M. Laforest

École Polytechnique de Montréal

10 janvier 2013

POLYTECHNIQUE
MONTREAL



LE GÉNIE
EN PREMIÈRE CLASSE

La majesté des ouragans

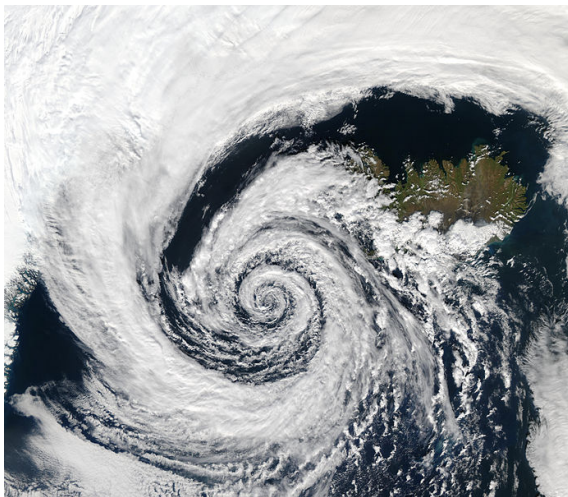


FIGURE : Image satellite d'un ouragan [NASA].

POLYTECHNIQUE
MONTREAL

LE GÉNIE
EN PREMIÈRE CLASSE



Objectifs

Afin de discuter d'un modèle des ouragans construit par Bister et Emanuel (1998), nous parlerons

- i) de **l'effet de Coriolis**,
- ii) de **l'engin de Carnot** et de la thermodynamique élémentaire,
- iii) de **la thermodynamique d'un ouragan**.



Le mystère de la rotation des ouragans

L'ouragan impressionne par sa **puissance** et sa **persistance**.

Mais son mystère vient de sa *structure circulaire* qu'il génère **spontanément**.

Un problème de perspective

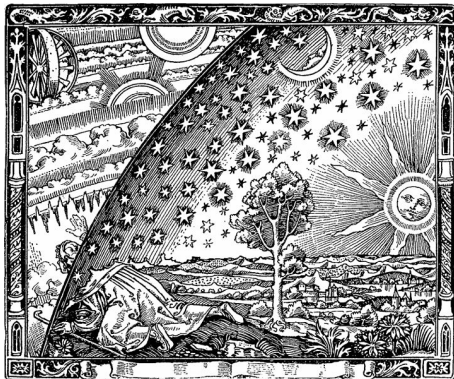


FIGURE : Quand on est sur la Terre, elle nous semble plate, comme pour le voyageur dans **La gravure de Flammarion (1888)**.

Un problème de perspective

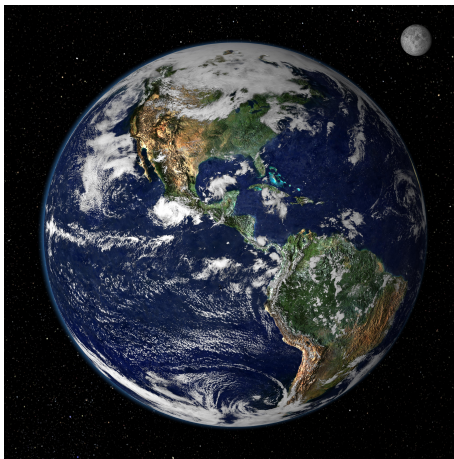
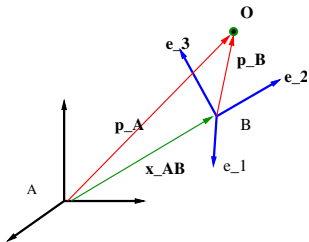


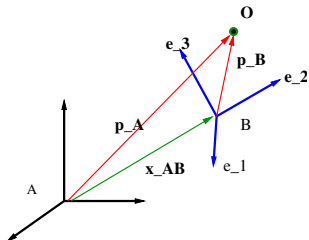
FIGURE : Quand on s'éloigne de la Terre, alors la perspective nous permet de voir la Terre pour ce qu'elle est [NASA].



Systèmes de coordonnées



Systèmes de coordonnées

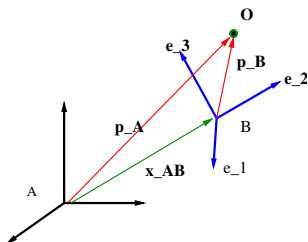


Définissons

$\mathbf{x}_{AB}(t)$ l'origine du système B

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ les axes du système B

Systèmes de coordonnées



Définissons

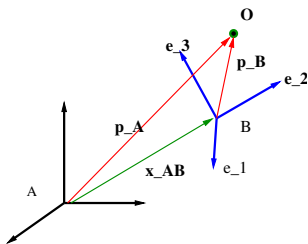
$\mathbf{x}_{AB}(t)$ l'origine du système B
 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ les axes du système B

Définissons les coordonnées
 d'un objet O

\mathbf{p}_A dans le système A

\mathbf{p}_B dans le système B

Systèmes de coordonnées



Définissons

$\mathbf{x}_{AB}(t)$ l'origine du système B
 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ les axes du système B

Définissons les coordonnées
 d'un objet O

\mathbf{p}_A dans le système A

\mathbf{p}_B dans le système B

Alors, ces quantités sont liées par

$$\mathbf{p}_A(t) = \mathbf{x}_{AB}(t) + \mathbf{p}_B(t) = \mathbf{x}_{AB}(t) + \sum_{j=1}^3 p_j(t) \mathbf{e}_j(t).$$

Calcul de la force fictive

On calcule d'abord la vitesse

$$\frac{d\mathbf{p}_A}{dt} = \frac{d\mathbf{x}_{AB}}{dt} + \sum_{j=1}^3 \frac{dp_j}{dt} \mathbf{e}_j + \sum_{j=1}^3 p_j \frac{d\mathbf{e}_j}{dt},$$

et ensuite l'accélération

$$\frac{d^2\mathbf{p}_A}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{x}_{AB}}{dt^2} + \sum_{j=1}^3 \frac{d^2p_j}{dt^2} \mathbf{e}_j + 2 \sum_{j=1}^3 \frac{dp_j}{dt} \frac{d\mathbf{e}_j}{dt} + \sum_{j=1}^3 p_j \frac{d^2\mathbf{e}_j}{dt^2}.$$

Calcul de la force fictive

On calcule d'abord la vitesse

$$\frac{d\mathbf{p}_A}{dt} = \frac{d\mathbf{x}_{AB}}{dt} + \sum_{j=1}^3 \frac{dp_j}{dt} \mathbf{e}_j + \sum_{j=1}^3 p_j \frac{d\mathbf{e}_j}{dt},$$

et ensuite l'accélération

$$\frac{d^2\mathbf{p}_A}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{x}_{AB}}{dt^2} + \sum_{j=1}^3 \frac{d^2p_j}{dt^2} \mathbf{e}_j + 2 \sum_{j=1}^3 \frac{dp_j}{dt} \frac{d\mathbf{e}_j}{dt} + \sum_{j=1}^3 p_j \frac{d^2\mathbf{e}_j}{dt^2}.$$

La force sur \mathcal{O} est ainsi

$$\mathbf{F}_B = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_f,$$

où la force fictive est

$$\mathbf{F}_f = -m \frac{d^2\mathbf{x}_{AB}}{dt^2} - 2m \sum_{j=1}^3 \frac{dp_j}{dt} \frac{d\mathbf{e}_j}{dt} - m \sum_{j=1}^3 p_j \frac{d^2\mathbf{e}_j}{dt^2}.$$



Application à la météorologie

Soit une rotation autour d'un axe Ω de vitesse angulaire constante
 $|\Omega| = \omega$.

Application à la météorologie

Soit une rotation autour d'un axe Ω de vitesse angulaire constante
 $|\Omega| = \omega$.

Alors, les axes subiront une rotation

$$\frac{d\mathbf{e}_j}{dt} = \Omega \times \mathbf{e}_j, \quad \frac{d^2\mathbf{e}_j}{dt^2} = \Omega \times (\Omega \times \mathbf{e}_j).$$



Application à la météorologie

Soit une rotation autour d'un axe Ω de vitesse angulaire constante
 $|\Omega| = \omega$.

Alors, les axes subiront une rotation

$$\frac{d\mathbf{e}_j}{dt} = \Omega \times \mathbf{e}_j, \quad \frac{d^2\mathbf{e}_j}{dt^2} = \Omega \times (\Omega \times \mathbf{e}_j).$$

De même pour l'origine

$$\frac{d\mathbf{x}_{AB}}{dt} = \Omega \times \mathbf{x}_{AB}, \quad \frac{d^2\mathbf{x}_{AB}}{dt^2} = \Omega \times (\Omega \times \mathbf{x}_{AB}).$$



Application à la météorologie

Soit une rotation autour d'un axe Ω de vitesse angulaire constante
 $|\Omega| = \omega$.

Alors, les axes subiront une rotation

$$\frac{d\mathbf{e}_j}{dt} = \Omega \times \mathbf{e}_j, \quad \frac{d^2\mathbf{e}_j}{dt^2} = \Omega \times (\Omega \times \mathbf{e}_j).$$

De même pour l'origine

$$\frac{d\mathbf{x}_{AB}}{dt} = \Omega \times \mathbf{x}_{AB}, \quad \frac{d^2\mathbf{x}_{AB}}{dt^2} = \Omega \times (\Omega \times \mathbf{x}_{AB}).$$

Une substitution dans la formule pour la force fictive, donne

$$\mathbf{F}_f = -m \Omega \times \left(\Omega \times (\mathbf{x}_{AB} + \mathbf{x}_B) \right) - 2m \Omega \times \frac{d\mathbf{p}_B}{dt}.$$



Application à la météorologie

La force fictive a une composante centrifuge

$$-m \Omega \times \left(\Omega \times (\mathbf{x}_{AB} + \mathbf{x}_B) \right)$$

et une composante que l'on appelle la **force de Coriolis**

$$-2m\Omega \times \frac{d\mathbf{p}_B}{dt}.$$



Application à la météorologie

La force fictive a une composante centrifuge

$$-m \Omega \times \left(\Omega \times (\mathbf{x}_{AB} + \mathbf{x}_B) \right)$$

et une composante que l'on appelle la **force de Coriolis**

$$-2m\Omega \times \frac{d\mathbf{p}_B}{dt}.$$

Dans l'hémisphère nord, la force de Coriolis a pour effet de **faire dévier vers la droite toute trajectoire.**

L'effet de Coriolis et la genèse d'un ouragan

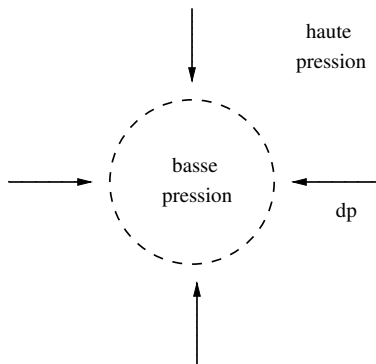


FIGURE : Le gradient de pression (noir) autour d'une dépression tropicale.

L'effet de Coriolis et la genèse d'un ouragan

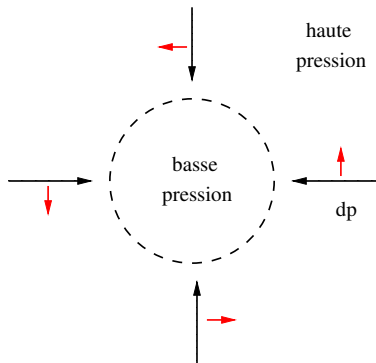


FIGURE : La force de Coriolis (rouge).

L'effet de Coriolis et la genèse d'un ouragan

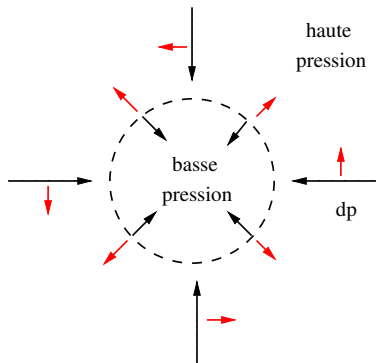


FIGURE : L'équilibre entre la pression (noir) et la force de Coriolis (rouge).

L'effet de Coriolis et la genèse d'un ouragan

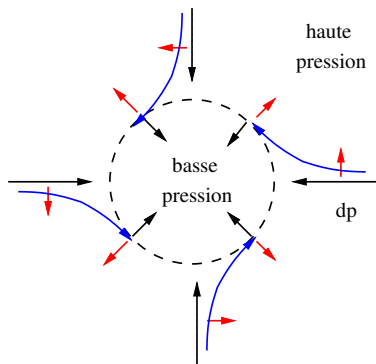
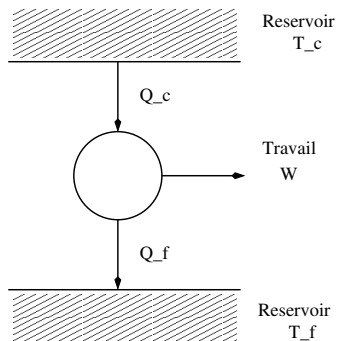
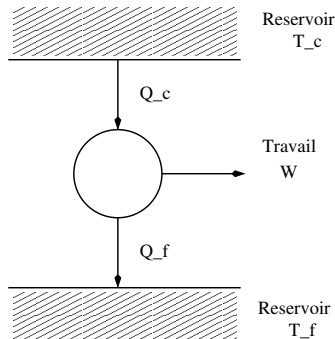


FIGURE : La trajectoire des vents induits par ces forces (bleu).

Principes d'un moteur à chaleur



Principes d'un moteur à chaleur



Globalement, ce moteur extrait une chaleur Q_C d'un réservoir chaud infini à température T_C . Il produit un travail W et émet une chaleur résiduelle Q_F à un réservoir froid infini à température T_F .

Hypothèses

Cet engin est une *expérience de la pensée*.



Hypothèses

Cet engin est une *expérience de la pensée*.

On suppose qu'un contenant contient un gaz mono-atomique.

Hypothèses

Cet engin est une *expérience de la pensée*.

On suppose qu'un contenant contient un gaz mono-atomique.

- Le contenant est étanche.



Hypothèses

Cet engin est une *expérience de la pensée*.

On suppose qu'un contenant contient un gaz mono-atomique.

- Le contenant est étanche.
- Le contenant peut être isolé thermiquement à volonté.



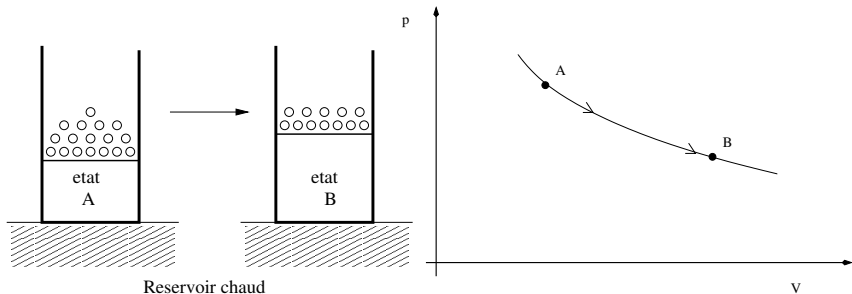
Hypothèses

Cet engin est une *expérience de la pensée*.

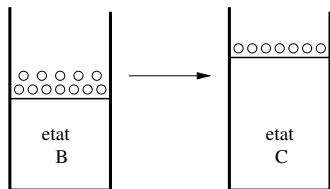
On suppose qu'un contenant contient un gaz mono-atomique.

- Le contenant est étanche.
- Le contenant peut être isolé thermiquement à volonté.
- Nous pourrions effectuer des transformations aussi lentes et lisses que l'on désire.

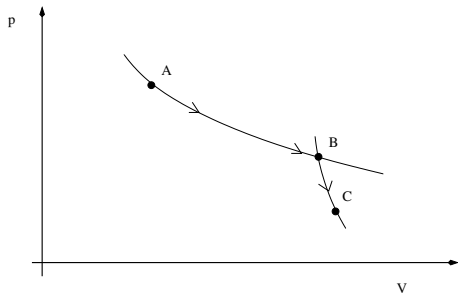
Étape # 1 : Détente isotherme



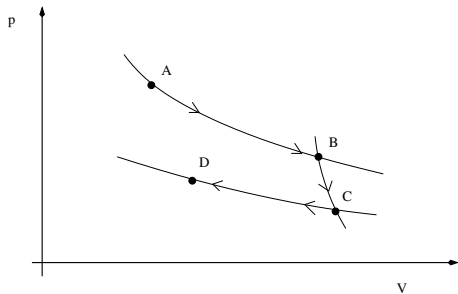
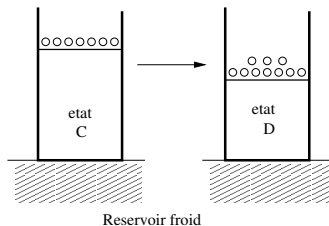
Étape # 2 : Détente adiabatique



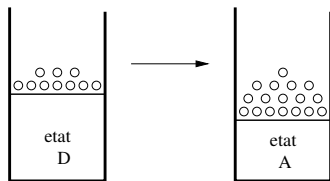
Piston isole thermiquement



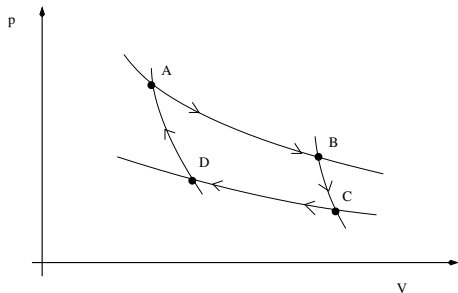
Étape # 3 : Compression isotherme



Étape # 4 : Compression adiabatique



isole thermiquement



Efficacité de l'engin à Carnot

On observe d'abord que le cycle est **réversible**.

Efficacité de l'engin à Carnot

On observe d'abord que le cycle est **réversible**.

La chaleur totale absorbée par le gaz est $Q_C - Q_F$ et la réversibilité implique

$$W = Q_C - Q_F.$$

Efficacité de l'engin à Carnot

On observe d'abord que le cycle est **réversible**.

La chaleur totale absorbée par le gaz est $Q_C - Q_F$ et la réversibilité implique

$$W = Q_C - Q_F.$$

L'efficacité énergétique d'un engin est défini par

$$\eta = \frac{W}{Q_C}.$$



Efficacité de l'engin à Carnot

On observe d'abord que le cycle est **réversible**.

La chaleur totale absorbée par le gaz est $Q_C - Q_F$ et la réversibilité implique

$$W = Q_C - Q_F.$$

L'efficacité énergétique d'un engin est défini par

$$\eta = \frac{W}{Q_C}.$$

Le théorème de Carnot stipule que le cycle de Carnot possède la plus grande efficacité et donc

$$\eta = \frac{W}{Q_C} = 1 - \frac{Q_F}{Q_C} = 1 - \frac{T_F}{T_C}.$$



Entropie et réversibilité

La formulation de Clausius (1855) de la deuxième loi de la thermodynamique est : *Pour tout processus cyclique,*

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0,$$

où δQ est l'apport de chaleur et T est la température.



Entropie et réversibilité

La formulation de Clausius (1855) de la deuxième loi de la thermodynamique est : *Pour tout processus cyclique,*

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0,$$

où δQ est l'apport de chaleur et T est la température.

Durant un processus réversible, cette intégrale s'annulera.



Entropie et réversibilité

La formulation de Clausius (1855) de la deuxième loi de la thermodynamique est : *Pour tout processus cyclique,*

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0,$$

où δQ est l'apport de chaleur et T est la température.

Durant un processus réversible, cette intégrale s'annulera.

Ceci suggère que l'on définisse **la variation de l'entropie** par l'intégrale ligne le long d'une trajectoire réversible,

$$\Delta S = \int_A^B \frac{\delta Q}{T}.$$



Entropie et réversibilité

La formulation de Clausius (1855) de la deuxième loi de la thermodynamique est : *Pour tout processus cyclique,*

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0,$$

où δQ est l'apport de chaleur et T est la température.

Durant un processus réversible, cette intégrale s'annulera.

Ceci suggère que l'on définisse **la variation de l'entropie** par l'intégrale ligne le long d'une trajectoire réversible,

$$\Delta S = \int_A^B \frac{\delta Q}{T}.$$

On conclut que si l'entropie est constante, alors le processus est adiabatique.

Profil de vitesse

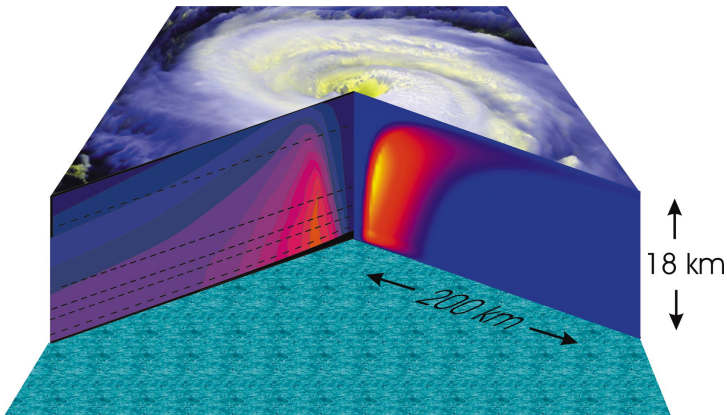


FIGURE : À gauche, les courbes de niveau de la vitesse tangentielle des vents. À droite, les courbes de niveau de la vitesse verticale des vents [Emanuel,2003].

Profil de l'entropie

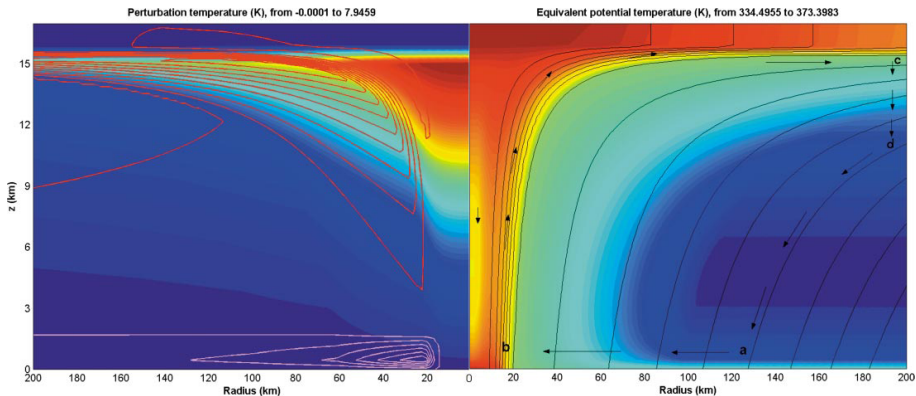


FIGURE : À gauche, les courbes de niveau de la vitesse radiale des vents. Les couleurs indiquent la perturbation de la température. À droite, on remarque les courbes de niveau de la quantité de mouvement spécifique et les couleurs indiquent l'entropie spécifique [Emanuel,2003].

Le cycle d'un ouragan

Suivons un volume de contrôle durant sa trajectoire

$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$:

Le cycle d'un ouragan

Suivons un volume de contrôle durant sa trajectoire

$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$:

$A \rightarrow B$: détente isotherme, gain de chaleur Q_C

Le cycle d'un ouragan

Suivons un volume de contrôle durant sa trajectoire

$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$:

$A \rightarrow B$: détente isotherme, gain de chaleur Q_C

$B \rightarrow C$: détente adiabatique

Le cycle d'un ouragan

Suivons un volume de contrôle durant sa trajectoire

$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$:

$A \rightarrow B$: détente isotherme, gain de chaleur Q_C

$B \rightarrow C$: détente adiabatique

$C \rightarrow D$: compression isotherme, perte de chaleur Q_F

Le cycle d'un ouragan

Suivons un volume de contrôle durant sa trajectoire

$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$:

$A \rightarrow B$: détente isotherme, gain de chaleur Q_C

$B \rightarrow C$: détente adiabatique

$C \rightarrow D$: compression isotherme, perte de chaleur Q_F

$D \rightarrow A$: compression adiabatique

Grâce à l'analogie au cycle de Carnot, on sait que

$$W = Q_C - Q_F, \quad W = \left(1 - \frac{T_F}{T_C}\right) Q_C,$$

où W est l'énergie disponible à l'ouragan.



Le bilan énergétique d'un ouragan

Le gain de chaleur Q_F est dû à la vapeur d'eau flux d'enthalpie attribuable au gain de vapeur d'eau est de la forme

$$C_k \rho (k^* - k).$$

Le bilan énergétique d'un ouragan

Le gain de chaleur Q_F est dû à la vapeur d'eau flux d'enthalpie attribuable au gain de vapeur d'eau est de la forme

$$C_k \rho (k^* - k).$$

Les vents de l'ouragan génère de la dissipation turbulente modélisée par un flux

$$C_D \rho |v| v.$$

Le bilan énergétique d'un ouragan

Le gain de chaleur Q_F est dû à la vapeur d'eau flux d'enthalpie attribuable au gain de vapeur d'eau est de la forme

$$C_k \rho (k^* - k).$$

Les vents de l'ouragan génère de la dissipation turbulente modélisée par un flux

$$C_D \rho |v| v.$$

On ignore la perte de chaleur dû à la radiation dans l'espace, la perte d'énergie dû à la friction avec le sol ou la surface de la mer ...

Le bilan énergétique d'un ouragan

Le gain de chaleur Q_F est dû à la vapeur d'eau flux d'enthalpie attribuable au gain de vapeur d'eau est de la forme

$$C_k \rho (k^* - k).$$

Les vents de l'ouragan génère de la dissipation turbulente modélisée par un flux

$$C_D \rho |v| v.$$

On ignore la perte de chaleur dû à la radiation dans l'espace, la perte d'énergie dû à la friction avec le sol ou la surface de la mer ...

L'énergie disponible

$$W = \left(1 - \frac{T_F}{T_C}\right) Q_C.$$



Le bilan énergétique d'un ouragan

Dans l'ouragan, W et Q_C ont lieu sur la trajectoire $A \rightarrow B$

$$2\pi \int_A^B C_{D\rho} |v|^3 r dr = \left(\frac{T_C - T_F}{T_C} \right) 2\pi \int_A^B \left[C_{k\rho} |v| (k^* - k) + C_{D\rho} |v|^3 \right] r dr.$$

Le bilan énergétique d'un ouragan

Dans l'ouragan, W et Q_C ont lieu sur la trajectoire $A \rightarrow B$

$$2\pi \int_A^B C_{D\rho} |v|^3 r dr = \left(\frac{T_C - T_F}{T_C} \right) 2\pi \int_A^B \left[C_{k\rho} |v| (k^* - k) + C_{D\rho} |v|^3 \right] r dr.$$

La vitesse des vents atteint un maximum v_m proche de l'oeil, donc

$$C_{D\rho} v_m^3 \approx \left(\frac{T_C - T_F}{T_C} \right) \left[C_{k\rho} v_m (k^* - k) + C_{D\rho} v_m^3 \right].$$

Le bilan énergétique d'un ouragan

Dans l'ouragan, W et Q_C ont lieu sur la trajectoire $A \rightarrow B$

$$2\pi \int_A^B C_{D\rho} |v|^3 r dr = \left(\frac{T_C - T_F}{T_C} \right) 2\pi \int_A^B \left[C_{k\rho} |v| (k^* - k) + C_{D\rho} |v|^3 \right] r dr.$$

La vitesse des vents atteint un maximum v_m proche de l'oeil, donc

$$C_{D\rho} v_m^3 \approx \left(\frac{T_C - T_F}{T_C} \right) \left[C_{k\rho} v_m (k^* - k) + C_{D\rho} v_m^3 \right].$$

Si l'on isole ensuite v_m , on conclut

$$v_m^2 \approx \frac{C_k}{C_D} \left(\frac{T_C - T_F}{T_F} \right) (k^* - k).$$

Conclusions élémentaires

La formule

$$v_m^2 \approx \frac{C_k}{C_D} \left(\frac{T_C - T_F}{T_F} \right) (k^* - k)$$

est remarquablement précise [Emanuel, 2003].

Conclusions élémentaires

La formule

$$v_m^2 \approx \frac{C_k}{C_D} \left(\frac{T_C - T_F}{T_F} \right) (k^* - k)$$

est remarquablement précise [Emanuel, 2003].

Si l'on substitue cette expression dans

$$C_D \rho |v| v,$$

alors on apprend qu'un ouragan de puissance moyenne dissipera $3 \times 10^{12} \text{W}$ [Emanuel, 2003], soit environ la consommation annuelle en électricité par l'ensemble des foyers américains.

Conclusions indirectes

On apprend indirectement que

- (i) les ouragans sont des engins de dissipation énergétique ;



Conclusions indirectes

On apprend indirectement que

- (i) les ouragans sont des engins de dissipation énergétique ;
- (ii) la dissipation énergétique des ouragans alimente l'ouragan lui-même ;



Conclusions indirectes

On apprend indirectement que

- (i) les ouragans sont des engins de dissipation énergétique ;
- (ii) la dissipation énergétique des ouragans alimente l'ouragan lui-même ;
- (iii) la vitesse maximale dépend de

$$\frac{C_k}{C_D}, \quad \text{et de} \quad \frac{T_C - T_F}{T_F}.$$



Conclusions pédagogiques

Ce modèle exige une maîtrise des concepts.

Conclusions pédagogiques

Ce modèle exige une maîtrise des concepts.

La force Coriolis : Calcul à plusieurs variables et l'algèbre linéaire ;

Conclusions pédagogiques

Ce modèle exige une maîtrise des concepts.

La force Coriolis : Calcul à plusieurs variables et l'algèbre linéaire ;

Les champs de vecteurs

Conclusions pédagogiques

Ce modèle exige une maîtrise des concepts.

La force Coriolis : Calcul à plusieurs variables et l'algèbre linéaire ;

Les champs de vecteurs

L'entropie : Cette notion rappelle celle de potentiel ;

Conclusions pédagogiques

Ce modèle exige une maîtrise des concepts.

La force Coriolis : Calcul à plusieurs variables et l'algèbre linéaire ;

Les champs de vecteurs

L'entropie : Cette notion rappelle celle de potentiel ;

L'intégration approximative : Une intégrale complexe est approximée par sa valeur en un point.

Références

Cette présentation est un sommaire du modèle que l'on retrouve dans les références suivantes.

M. Bister et K. A. Emanuel, *Dissipative Heating and Hurricane Intensity*, *Meteorology and Atmospheric Physics*, 65, 233-240 (1998).

K. A. Emanuel, *Tropical Cyclones*, *Annual Review of Earth and Planetary Science*, 31, 75-104 (2003).

M. Bister et al., Comment on Makarieva et al. 'A critique of ...', *Proceedings of the Royal Society A*, 467, 1-6 (2011).