Les systèmes planétaires en mécanique céleste

Florin Diacu

Pacific Institute for the Mathematical Sciences
et
Départment de mathématiques et de statistique
Université de Victoria

Activité MPT2013 cégeps, Montréal
8 décembre 2012

Origines

– le mouvement des planètes est, peut-être, la science la plus ancienne, ayant son origine dans les périodes préhistoriques

– dans l'antiquité, les astronomes ont étudié le mouvement des planètes, et ont pu prévoir des éclipses solaires et lunaires

– mais les progrès sérieux ont été accomplis seulement après que l'astronome polonais Nicolas Copernic a introduit le système héliocentrique (en 1543)

Première loi de Kepler (1609) – loi des orbites

– Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil occupe l'un des foyers.

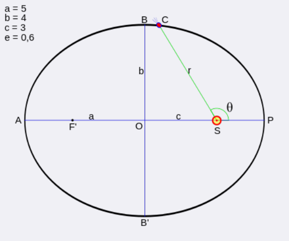
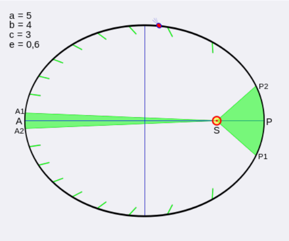


Schéma d'une orbite elliptique: l'excentricité étant très exagérée vis-à-vis de celles des planètes du système solaire.

Deuxième loi de Kepler (1609) – loi des aires

L'aire balayée par le rayon entre deux positions A1 et A2 est égale à l'aire balayée par ce segment entre deux positions P1 et P2 si la durée qui sépare les positions A1 et A2 est égale à la durée qui sépare les positions P1 et P2.



Loi des aires: chaque intervalle correspond à 5% de la période.

Troisième loi de Kepler (1618) – loi des périodes

Le carré de la période sidérale P d'une planète (temps entre deux passages successifs devant une étoile lointaine) est directement proportionnel au cube du demi-grand axe a de la trajectoire elliptique de la planète:

$$\left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 \cdot a^3 = \mathrm{constante}$$

La loi d’attraction universelle

– 1687, Isaac Newton:

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica

– il a voulu comprendre le mouvement de la lune

– pour lui, l’attraction universelle agit de manière inversement proportionnelle à l’aire d’une sphère, i.e. $\sim \frac{1}{r^2}$, où r est le rayon de la sphère.

– il a considéré pour la premièr fois le problème des N corps comme un modèle des système planétaires

– dans ce problème, les planètes ont des masses mais n’ont pas de dimensions (elles sont approximées par des points)

– son approche était géométrique

Le problème des 2 corps

– considérons des masses $m_1, m_2 > 0$, avec des positions $\mathbf{q_1} = (x_1, y_1, z_1)$ et $\mathbf{q}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, alors les équations du mouvement sont

$$\ddot{\mathbf{q}}_1 = \frac{m_2(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1)}{|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^3}, \quad \ddot{\mathbf{q}}_2 = \frac{m_1(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)}{|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^3},$$

où $|\;.\;|$ est la norme euclidienne.

– il est possible d'obtenir les solutions explicites de ce système d'équations

– le mouvement d'un corps relativement à l'autre a lieu sur un cercle, une ellipse, une parabole, une hyperbole, ou une ligne droite

– les lois empiriques de Kepler peuvent être prouvées à l'aide de ce problème

Les équations du problème des N corps

Considérrons les masses $m_1, m_2, \ldots, m_N > 0$, dont les positions sont données par les vecteurs $\mathbf{q}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Alors le mouvement des corps est décrit par les équations

$$\ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{m_j(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i)}{|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i|^3}, \; i = 1, 2, \ldots, N,$$

équivalent avec le système du premier ordre

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}_i = m_i^{-1}\mathbf{p}_i \\ \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{m_j(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i)}{|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i|^3}, \end{cases}$$

où $\mathbf{p}_i := m_i \mathbf{q}_i$ est la quantité de mouvement du corps m_i, $i = 1, 2, \ldots, N$.

– l'espace des phases $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_N)$ a la dimension $6N$

Intérgrales premières

– une méthode bien connue pour réduire l'ordre d'un système d'équations différentielles est la méthode des intégrales premières

– une intégrale première d'une équation différentielle

$$y' = f(t, y)$$

est une fonction F telle que, si x est une solution de l'équation différentielle, alors

$$F(x(t)) = \mathrm{constante}$$

pour toutes les valeurs t où la solution x est définie.

– une intégrale première a souvent un sens physique, et correspond à la préservation d'une quantité (comme l'énergie ou le moment cinétique)

– chaque intégrale première fournit un feuilletage (une division en lamelles) de l'espace des phases

Les intégrales du problème des N corps

– 3 intégrales de la quantité de mouvement: $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$,

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i(t) = \mathbf{a},$$

– 3 intégrales du centre de gravité: $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$,

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{q}_i(t) = \mathbf{a}t + \mathbf{b}$$

– 3 intégrales du moment cinétique: $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$,

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{q}_i \times \mathbf{p}_i = \mathbf{c},$$

– 1 integrale de l'énergie: $h \in \mathbb{R}$, $T(\mathbf{p}) + U(\mathbf{q}) = h$, où
$T(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i^{-1} \mathbf{p}_i$ est l'énergie cinétique et
$U(\mathbf{q}) = -\sum_{1 \le i < j \le N} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|}$ est l'énergie potentielle.

Théorème de Bruns

– au total, il y a 10 intégrales du problème des N corps

– quelques symétries permettent de réduire encore la dimension du problème de 2

– alors, la dimension du système est $6N - 12$

– 1887, Heinrich Bruns:

Il y a seulement 10 intègrales linéairement indépendantes du problème des N corps qui sont des fonctions algébriques en $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ et t.

– plus tard, Henri Poincaré et Paul Painlevé ont fournit des résulats plus généraux que Bruns

Prix du Roi Oscar II

– 1885, *Acta mathematica* a annoncé un grand prix (commission: Karl Weierstrass, Charles Hermite, et Gösta Mittag-Leffler, le Rédacteur en chef de ce Journal):

“Étant donné un système d’un nombre quelconque de points matériels qui s’attirent mutuellement suivant la loi de Newton, on propose, sous la supposition qu’un choc de deux points n’ait jamais lieu, de représenter les coordonnées de chaque point sous forme de séries procédant suivant quelques fonctions connues du temps et qui convergent uniformément pour toute valeur réelle de la variable.”

“Ce problème dont la solution étendra considérablement nos connaissances par rapport au système du monde, paraît pouvoir être résolu à l’aide des moyens analytiques que nous avons actuellement à notre disposition; on peut le supposer du moins, car Leujeune-Dirichlet a communiqué peu de temps avant sa mort à un géomètre de ses amis qu’il avait découvert une méthode pour l’intégration des équations différentielles de la mécanique, et qu’en appliquant cette méthode il était parvenu à démontrer d’une manière absolument rigoureuse la stabilité de notre système planétaire. Malheureusement nous ne connaissons rien sur cette méthode, si ce n’est que la théorie des oscillations infiniment petites paraît avoir servi de point de départ pour sa découverte.”

"On peut pourtant supposer presque avec certitude que cette méthode était basée non point sur des calculs longs et compliqués, mais sur le développement d'une idée fondamentale et simple, qu'on peut avec raison espérer retrouver par un travail persévérant et approfondi. Dans le cas pourtant où le problème proposé ne parviendrait pas à être résolu pour l'époque du concours, on pourrait décerner le prix pour un travail, dans lequel quelque autre problème de la mécanique serait traité de la manière indiquée et résolu complètement."

Résultats

– personne n’a résolu le problème pendant la période du concours

– le 21 février 1889, le prix a été attribué à Henri Poincaré pour ses contributions remarquables à la compréhension du problème des N corps et aux questions fondamentales associées de la dynamique

– il a pensé d’avoir résolu un résultat de stabilité pour le problème restreint des 3 corps

– mais pendent le processus éditorial, Poincaré a découvert une erreur dans sa démonstration, et simultanément la possibilité de comportement chaotique, ce qui est l’opposé de la stabilité

Le système solaire est-il stable?

– 1978, Jürgen Moser: “La réponse est encore inconnue, mais cette question a mené à des résultats très profonds qui sont probablement plus importants que la réponse à la question initiale.”

– 1891, Henri Poincaré: “Une des questions avec lesquelles les chercheurs ont été les plus préoccupés est celle de la stabilité du système solaire. C’est, si on dit la vérité, plus une question mathématique que physique. Même si on devait découvrir une preuve générale et rigoureuse, on ne pourrait pas conclure que le système solaire est éternel. Il peut, en fait, être sujet à d’autres forces autres que les forces de Newton.”

Singularités des équations de mouvement

Rappelle que les équations du problème des N corps sont:

$$\ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{m_j(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i)}{|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i|^3}, \; i = 1, 2, \ldots, N,$$

donc nous devons imposer la condition $\mathbf{q}_i \neq \mathbf{q}_j$ pour $i \neq j, \; i, j \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Les équations ne sont pas définies dans l'ensemble singulier

$$\Delta = \cup_{1 \leq i < j \leq N} \{(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_N) | \mathbf{q}_i = \mathbf{q}_j\},$$

là où des collisions ont lieu.

Singularités des solutions

– pour des conditions initiales données à $t = 0$, la théorie des équations différentielles assure l'existence et l'unicité d'une solution analytique $\mathbf{q} := (\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_N)$ pour les équations de mouvement, définie dans un intervalle maximal $[0, t^*)$

– si $t^* = \infty$, la solution est globalement définie

– si $t^* < \infty$, la solution a une singularité à t^*

– une singularité se produit quand $\mathbf{q}(t)$ tend vers l'ensemble Δ, par exemple si une collision se produit

Question: Est-il possible d'atteindre Δ sans collision?

Comment une fonction peut-elle tendre à un ensemble?

– quand la solution $\mathbf{q}$ se termine dans une collision, alors $\mathbf{q}(t) \to \Delta$ avec phase asymptotique, i.e., elle atteint un certain élément de Δ

– mais est-il possible d'atteindre Δ sans phase asymptotique, i.e., par l'oscillation entre des éléments divers, sans tendre vers un élément précis?

Conjecture de Painlevé

– 1896, Paul Painlevé a prouvé le théorème suivant:

Dans le problème des 3 corps, les seules singularités dans lesquelles une solution peut terminer à t^* sont des collisions.

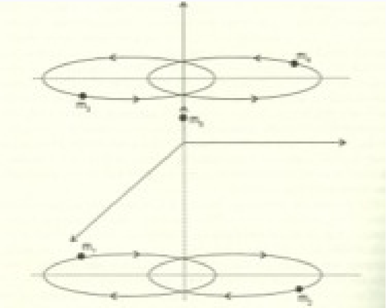
– mais il n’a pas pu prouver ce résultat pour $N \geq 4$. Il a donc proposé la conjecture suivante:

Dans le problème des N corps, $N \geq 4$, il y a des solutions $\mathbf{q}$ qui terminent dans de pseudo-collisions, ça veut dire, tels que $\mathbf{q}(t) \to \Delta$ quand $t \to t^*$ sans phase asymptotique.

– 1908, Hugo von Zeipel a montré que des pseudo-collisions sont possibles seulement si le mouvement “éclate” (n’est pas borné) en temps fini

En example de pseudo-collision

– 1991, Jeff Xia a trouvé un example pour le problème des 5 corps:



Quelle est la forme de l'espace physique?

– comment faisons-nous pour mesurer la distance entre deux points: selon une ligne droite (comme sur une table), le long d'un arc d'un cercle (comme nous le faisons entre deux points sur la Terre), ou encore selon un autre chemin?

– Karl Friedrich Gauss ne pouvait exclure la possibilité que notre univers ait la forme d'une 3-sphère (espace elliptique),

$$\mathbb{S}^3: \quad w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

ou d'une 3-sphère hyperbolique (espace hyperbolique),

$$\mathbb{H}^3: \quad w^2 + x^2 + y^2 - z^2 = -1, \quad z > 0$$

(la généralisation à trois dimensions de la nappe supérieure de l'hyperboloïde à deux nappes)

– c'est pourquoi il voulait trouver une façon de déterminer la géométrie de l'espace ambiant

La solution de Gauss

– en 1820, Gauss inventa un instrument topographique, qu'on appelle l'héliotrope, qu'il utilisa pour mesurer les angles d'un triangle formé par les sommets de trois montagnes près de Göttingen: Inselberg, Brocken et Hoher Hagen

– il fit cette expérience pour vérifier si l'espace est hyperbolique ou elliptique, autrement dit, s'il correspond à des triangles dont la somme des angles est plus petite ou plus grande que π, respectivement

– mais ses expériences échouèrent, les résultats étant trop proches de π pour être concluants à cause de la marge d'erreur dont il fallait tenir compte avec ses instruments de mesure

Une autre solution?

– on peut imaginer que la méthode de Gauss fournirait une réponse pour des triangles plus grands, mais l'échelle qu'il faudrait utiliser pour réaliser cette expérience rend l'idée impraticable

– nous ne pouvons pas mesurer les angles des triangles formés par les étoiles pour la simple raison que nous ne pouvons pas atteindre ces objets cosmiques

– alors quelle est la solution?

– si on peut prouver mathématiquement que certaines orbites de corps célestes sont caractéristiques d'un seul des espaces elliptique, plat, ou hyperbolique, on peut possiblement comprendre la nature de l'univers grâce aux seules observations astronomiques

Le problème des N corps dans les espaces de la courbure (gaussienne) constante (i.e. en $\mathbb{S}^3$ et $\mathbb{H}^3$)

– la courbure de $\mathbb{S}^3$ est 1, et de $\mathbb{H}^3$ est -1

– les équations de mouvement:

$$\ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{m_j[\mathbf{q}_j - \sigma(\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j)\mathbf{q}_i]}{[\sigma - \sigma(\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j)^2]^{3/2}} - \sigma(\dot{\mathbf{q}}_i \cdot \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{q}_i,$$

$$\sigma = \begin{cases} +1 & \text{en } \mathbb{S}^3 \\ -1 & \text{en } \mathbb{H}^3, \end{cases}$$

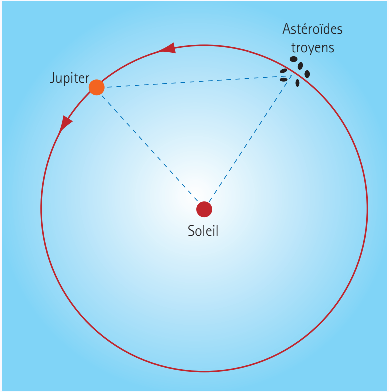
$$\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j := w_i w_j + x_i x_j + y_i y_j + \sigma z_i z_j$$

Solution lagrangienne (triangle équilatéral) du problème plat (euclidien) de 3 corps

– découverte en 1772 par Joseph Louis Lagrange

– le mouvement est dans un plan de $\mathbb{R}^3$

– les masses sont arbitraires, et les corps se déplacent autour du centre de masse



Solution lagrangienne du problème courbe de 3 corps

– pour une orbite lagrangienne sur une grande sphère, $\mathbb{S}^2$, de $\mathbb{S}^3$, ou sur une grande sphère hyperbolique, $\mathbb{H}^2$, de $\mathbb{H}^3$, les masses doivent être égales: $m_1 = m_2 = m_3$

– le problème est ouvert dans le cas de $\mathbb{S}^3$ et $\mathbb{H}^3$

– c'est une indication, mais pas une preuve, que l'espace est plat pour des distances comparables à celles du système solaire

– une démostration complète doit prouver qu'il n'y a aucune orbite quasi-périodique près des orbites lagrangiennes (problème ouvert)

Merci beaucoup!